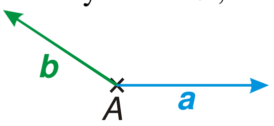
7.2.8 Skalární součin II

Předpoklady: 7207

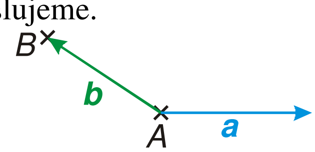
Pedagogická poznámka: Hodina má tři části, považuji tu prostřední za nejméně důležitou, a proto v případě potřeby omezuji hlavně ji. Na začátku hodiny je důležité nechat studentům čas na samostatné hledání kolmých vektorů.

Př. 1: Na schématickém náčrtku bez souřadnic jsou dány vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a bod A. Překresli jej do sešitu a dokresli do něj:
body: $B = A + \boldsymbol{b}$, $C = A + 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $D = A - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$,
vektory: $\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{d} = D - B$.

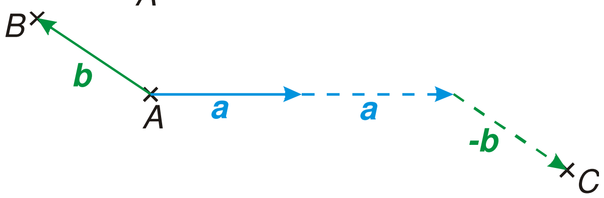


Postupně do obrázku dokreslujeme.

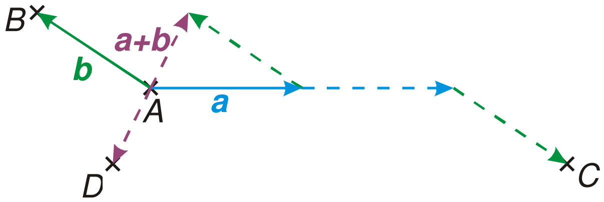
$B = A + \boldsymbol{b}$



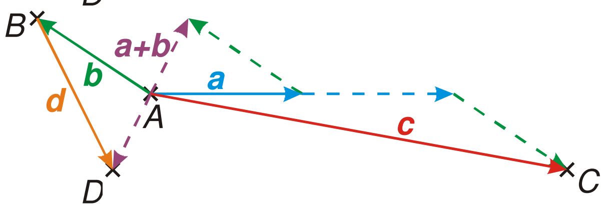
$C = A + 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$



$D = A - (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$



$\boldsymbol{c} = \overrightarrow{AC}$, $\boldsymbol{d} = D - B$



Teď už se můžeme věnovat řešení příkladů, které využívají skalární součin a jeho vlastnosti.

Př. 2: Rozhodni výpočtem, zda jsou vektory $\boldsymbol{u} = (2;-3)$ a $\boldsymbol{v} = (2;1)$ navzájem kolmé.

Platí: $\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi$, pokud jsou vektory na sebe kolmé, platí $\varphi = 90° \Rightarrow \cos 90° = 0 \Rightarrow$
$\boldsymbol{uv} = 0 \Rightarrow$ stačí spočítat skalární součin, pokud je nulový, jsou vektory na sebe kolmé.
$\boldsymbol{uv} = (2;-3)\cdot(2;1) = 2\cdot 2 + (-3)\cdot 1 = 1 \Rightarrow$ vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ na sebe kolmé nejsou.

Př. 3: Najdi alespoň dva vektory kolmé na vektor $\boldsymbol{u} = (1;5)$.

Kolmých vektorů je nekonečně mnoho (ale jsou všechny navzájem rovnoběžné). Že je vektor kolmý na vektor $\boldsymbol{u}$, poznáme pomocí skalárního součinu: $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Jde například o tyto vektory:

- $\boldsymbol{v} = (5;-1)$, protože $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = 1 \cdot 5 + 5 \cdot (-1) = 0$
- $\boldsymbol{w} = (-5;1)$, protože $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w} = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 = 0$
- a spousta dalších možností.

Pedagogická poznámka: U předchozího příkladu je důležité dotlačit žáky k tomu, aby se o řešení alespoň pokusili a ozkoušeli ho skalárním násobením. Pak i většina těch, kteří vektor odhadnou špatně, najde správné řešení.

Př. 4: Najdi obecný postup, jak určit souřadnice vektoru v rovině, který je kolmý na vektor $\boldsymbol{u} = (u_1; u_2)$.

Skalární součin musí být roven nule $\Rightarrow \boldsymbol{uv} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = 0$. Aby to vyšlo, stačí položit $v_1 = u_2$ a $v_2 = -u_1$. Po dosazení $\boldsymbol{uv} = u_1 u_2 + u_2(-u_1) = u_1 u_2 - u_2 u_1 = 0$
Druhá možnost $v_1 = -u_2 \quad v_2 = u_1$.

Předchozí pravidlo je velmi důležité! Budeme ho časem používat i několikrát v jediné hodině.

Př. 5: Najdi všechny vektory kolmé na vektor $\boldsymbol{u} = (-2;3)$. Výsledek ověř pomocí skalárního součinu.

Jedním z kolmých vektorů je vektor $\boldsymbol{v} = (3;2)$, $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = (-2) \cdot 3 + 3 \cdot 2 = 0$.
Všechny další hledané vektory jsou jeho násobky $\Rightarrow$ na vektor $\boldsymbol{u} = (-2;3)$ jsou kolmé vektory $(3k;2k)$ $k \in R - \{0\}$.
Ověření: $(-2;3) \cdot (3k;2k) = (-2) \cdot 3k + 3 \cdot 2k = -6k + 6k = 0$.

Př. 6: Najdi vektor kolmý na vektor $\boldsymbol{u} = (-2;3;4)$. Správnost výsledku ověř pomocí skalárního součinu.

Vektory jsou navzájem kolmé, právě když je jejich skalární součin roven nule $\Rightarrow$ u vektorů v prostoru si můžeme zvolit první dvě souřadnice libovolně a třetí dopočítáme tak, aby skalární součin vyšel nulový.

$\boldsymbol{v} = (25;3;x)$

$\boldsymbol{uv} = (-2;3;4)(25;3;x) = -2 \cdot 25 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot x = 0$

$4x = 41$

$x = \frac{41}{4} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \left(25;3;\frac{41}{4}\right)$

Ověření: $\boldsymbol{uv} = (-2;3;4)\left(25;3;\frac{41}{4}\right) = -2\cdot 25 + 3\cdot 3 + 4\cdot\frac{41}{4} = 0$

Elegantnější řešení: $\boldsymbol{v} = (2;0;x)$

$\boldsymbol{uv} = (-2;3;4)(2;0;x) = -2\cdot 2 + 3\cdot 0 + 4\cdot x = 0$

$x = 1 \Rightarrow \boldsymbol{v} = (2;0;1)$

Ověření: $\boldsymbol{uv} = (-2;3;4)(2;0;1) = -2\cdot 2 + 3\cdot 0 + 4\cdot 1 = 0$

Nejelegantnější řešení:
U jedné souřadnice napíšeme nulu, pro zbývající použijeme pravidlo pro dvousložkové vektory:

$\boldsymbol{v} = (3;2;0)$

Ověření: $\boldsymbol{uv} = (-2;3;4)(3;2;0) = -2\cdot 3 + 3\cdot 2 + 4\cdot 0 = 0$.

Pedagogická poznámka: Příklad je jednoduchý, ale často působí studentům problémy podobně jako jiné příklady, ve kterých existuje více řešení.
Diskuse o výhodnosti jednotlivých řešení záleží na rychlosti postupu v hodině. Je třeba, aby si studenti ozkoušeli, že jde o jinou situaci než v rovině, kde všechny kolmé vektory leží na jedné přímce.

Pedagogická poznámka: Hlavní funkcí ověření u předchozích dvou příkladů je opakování výpočtu skalárního součinu, aby s ním měli studenti menší problémy ke konci hodiny.

Pedagogická poznámka: Další (důkazová) část hodiny většinu studentů příliš neoslovuje. Kdyby měli používat skalární součin při výpočtech, intuitivně by postupovali správně a proto jim rozebírání a důkazy přijdou zbytečné. Snažím se postupovat tak, aby na příklady 7 a 8 zbylo minimálně 15 minut času.
Pokud mají někteří studenti problémy s předchozí částí hodiny, důkazy nakousnu pro zbytek třídy a s nimi se vrátím na začátek.

V minulé hodině jsme si odvodili význam skalárního součinu, ale v našem odvození byla nedůslednost. Vypočítali jsme si skalární součin ve speciální soustavě souřadnic $\Rightarrow$ musíme dokázat, že skalární součin na volbě soustavy souřadnic nezávisí, podobně jako na soustavě souřadnic nezávisí velikost vektoru.

Skalární součin má podobné vlastnosti jako jiné druhy součinů.

Př. 7: Doplň následující pravidla pro skalární součin.
Pro každé vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo c platí:
a) $\boldsymbol{uv} =$ b) $(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} =$ c) $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) =$.
Alespoň dva vztahy dokaž pro vektory v rovině vypočítáním obou stran rovnosti.

Pro každé vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ (v rovině nebo v prostoru) a každé reálné číslo c platí:

$$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$$
$$(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{uv})$$
$$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv}.$$

Důkazy:

$\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{vu}$

$u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2$

Vztah platí, neboť násobení reálných čísel je komutativní a platí tedy $u_1v_1 = v_1u_1$.

$(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = c(\boldsymbol{uv})$

Levá strana: $(c\boldsymbol{u})\boldsymbol{v} = (cu_1; cu_2)(v_1; v_2) = cu_1v_1 + cu_2v_2$.

Pravá strana: $c(\boldsymbol{uv}) = c(u_1v_1 + u_2v_2) = cu_1v_1 + cu_2v_2$.

$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv}$

Levá strana: $\boldsymbol{w}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = (w_1; w_2)(u_1+v_1; u_2+v_2) = w_1(u_1+v_1) + w_2(u_2+v_2)$.

Pravá strana: $\boldsymbol{wu} + \boldsymbol{wv} = (w_1; w_2)(u_1; u_2) + (w_1; w_2)(v_1; v_2) = w_1u_1 + w_2u_2 + w_1v_1 + w_2v_2$.

Předchozí pravidla nám umožňují roznásobovat skalárním součinem závorky.

Př. 8: Vypočti:
a) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d})$ b) $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2$ c) $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2$

Pro každé vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$ platí: $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{ad} + \boldsymbol{bc} + \boldsymbol{bd}$.

Pro každé vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí: $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})^2 = \boldsymbol{u}^2 + 2\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{v}^2$.

Pro každé vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ platí: $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2 = \boldsymbol{u}^2 - 2\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{v}^2$.

Poslední vztah můžeme upravit:

$(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2 = \boldsymbol{u}^2 - 2\boldsymbol{uv} + \boldsymbol{v}^2$

$2\boldsymbol{uv} = \boldsymbol{u}^2 + \boldsymbol{v}^2 - (\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2$

platí $\boldsymbol{u}^2 = |\boldsymbol{u}|^2$, $\boldsymbol{v}^2 = |\boldsymbol{v}|^2$, $(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v})^2 = |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2$, po dosazení a vydělení dvěma získáme:

$\boldsymbol{uv} = \frac{1}{2}\left(|\boldsymbol{u}|^2 + |\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}|^2\right)$ - to jsme potřebovali, skalární součin je vyjádřen pomocí velikostí vektorů, které nezávisí na soustavě souřadnic $\Rightarrow$ skalární součin také nezávisí na volbě soustavy souřadnic $\Rightarrow$ odvození z minulé hodiny bylo zcela v pořádku.

Vzorec pro skalární součin můžeme upravit:

$\boldsymbol{uv} = |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|}$ $\Rightarrow$ můžeme snadno spočítat úhel, který svírají dva vektory.

Př. 9: Urči úhel, který svírají dvojice vektorů z příkladu 2 z minulé hodiny, a porovnej výsledky s nakreslenými obrázky:
a) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (3;4)$, b) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (0;5)$.

a) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (3;4)$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 24$

$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{24}{5\cdot 5} \Rightarrow \varphi = 16°16'$

b) $\boldsymbol{u} = (4;3)$, $\boldsymbol{v} = (0;5)$

$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ $\qquad$ $|\boldsymbol{v}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{0^2 + 5^2} = 5$

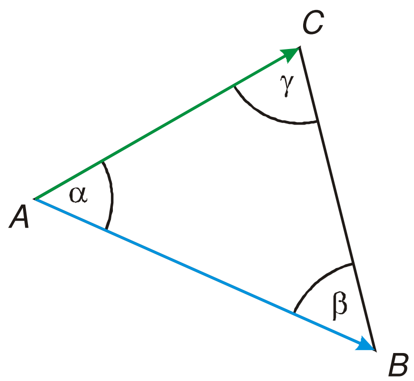
$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = 4\cdot 0 + 3\cdot 5 = 15$

$\cos\varphi = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{15}{5\cdot 5} \Rightarrow \varphi = 53°8'$

Oba výsledky odpovídají obrázkům z minulé hodiny.

Pedagogická poznámka: V předchozím příkladu jde sice o pouhé dosazení do vzorce, ale problémů se objeví dost. Někteří studenti určují pouze polovinu skalárního součinu, jiní mají problémy s velikostmi vektorů.

Př. 10: Je dán trojúhelník ABC, $A[1;-2;3]$, $B[4;5;2]$ a $C[-3;-2;-2]$. Urči vnitřní úhly.



Z obrázku je vidět, že úhel α můžeme určit pomocí skalárního součinu vektorů $B-A$ a $C-A$.

$B-A = (3;7;-1) \Rightarrow |B-A| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-1)^2} = \sqrt{59}$

$C-A = (-4;0;-5) \Rightarrow |C-A| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-5)^2} = \sqrt{41}$

$\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{(3;7;-1)(-4;0;-5)}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{41}} = \frac{-12+5}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{41}} = -0{,}142 \Rightarrow \alpha = 98°11'$

β pomocí vektorů $A-B$ a $C-B$:

$A-B = (-3;-7;1) \Rightarrow |B-A| = \sqrt{(-3)^2 + (-7)^2 + 1^2} = \sqrt{59}$

$C-B = (-7;-7;-4) \Rightarrow |C-B| = \sqrt{(-7)^2 + (-7)^2 + (-4)^2} = \sqrt{114}$

$\cos\beta = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{(-3;-7;1)(-7;-7;-4)}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{114}} = \frac{21+49-4}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{114}} = 0{,}805 \Rightarrow \beta = 36°25'$

γ pomocí vektorů $A-C$ a $B-C$:

$A-C = (4;0;5) \Rightarrow |A-C| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 5^2} = \sqrt{41}$

$B-C = (7;7;4) \Rightarrow |B-C| = \sqrt{7^2 + 7^2 + 4^2} = \sqrt{114}$

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{uv}}{|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|} = \frac{(4;0;5)(7;7;4)}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{114}} = \frac{28+0+20}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{114}} = 0,702 \Rightarrow \gamma = 45°24'$$

Rozhodně rychlejší výpočet než pomocí kosinové věty.

Pedagogická poznámka: Většina studentů sama přijde na to, že musí určit vektory, které leží na jednotlivých stranách. Značná část z nich ale nedává pozor, když vektory vypočtené pro předchozí úhel používá u dalšího vrcholu. Často pak určují místo vnitřního úhlu jeho doplněk do $180°$ stupňů.

Př. 11: Petáková:
strana 101/cvičení 25 c) d)
strana 101/cvičení 26 c)
strana 101/cvičení 31 c)
strana 102/cvičení 32

Shrnutí: Pomocí skalárního součinu snadno nalezneme kolmý vektor – prohozením souřadnic a otočením jednoho znaménka.